Survol de l'indice de composition des nombres $\lambda(n)$

Stage Été 2007

Jean-Marie De Koninck et Jean-Philippe Labbé

17 août 2007

Historique

- En 2000, J. Browkin "The *abc*-conjecture"
- En 2001, P. Ribenboim "The *abc*-conjecture and the radical index of integers"
- De 2003 à ce jour, De Koninck, Doyon, Kátai, Luca, et Subbarao ont collaboré dans plusieurs articles
- Finalement en 2006, W.G. Zhai a généralisé des résultats de De Koninck et Kátai.

Plan de l'exposé

Définitions et exemples

L'indice de composition $\lambda(n)$ est une fonction arithmétique (de $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$) donnée par

$$\lambda(n) := \frac{\log n}{\log \gamma(n)}, \left(= \log_{\gamma(n)} n\right),$$

où $\gamma(n) := \prod_{p|n} p$. Par commodité, on pose $\gamma(1) = \lambda(1) = 1$.
Exemples :

Définitions et exemples

L'indice de composition $\lambda(n)$ est une fonction arithmétique (de $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$) donnée par

$$\lambda(n) := \frac{\log n}{\log \gamma(n)}, \left(= \log_{\gamma(n)} n\right),$$

où $\gamma(n) := \prod_{p|n} p$. Par commodité, on pose $\gamma(1) = \lambda(1) = 1$.
Exemples :

- $\lambda(32 = 2^5) = 5$,
  $\lambda(25000 = 2^3 \cdot 5^5) = 4.397940007...$,
  $\lambda(28800000 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^5) = 5.049952714...$

- Soit $n > 1$. Alors $\lambda(n) = 1 \iff n$ est libre de carrés;

- Soit $n > 1$. Alors $\lambda(n) = 1 \iff n$ est libre de carrés;
- $\lambda(n) \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$;

- Soit $n > 1$. Alors $\lambda(n) = 1 \iff n$ est libre de carrés;
- $\lambda(n) \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$;
- Si $\lambda(n) = \lambda(m) \notin \mathbb{N}$, alors $n = m$;

- Soit $n > 1$. Alors $\lambda(n) = 1 \iff n$ est libre de carrés;
- $\lambda(n) \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$;
- Si $\lambda(n) = \lambda(m) \notin \mathbb{N}$, alors $n = m$;
- L'ensemble $\{\lambda(n) : n = 1, 2, \dots\}$ est dense dans l'ensemble des nombres réels ≥ 1

- Soit $n > 1$. Alors $\lambda(n) = 1 \iff n$ est libre de carrés;
- $\lambda(n) \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$;
- Si $\lambda(n) = \lambda(m) \notin \mathbb{N}$, alors $n = m$;
- L'ensemble $\{\lambda(n) : n = 1, 2, \ldots\}$ est dense dans l'ensemble des nombres réels ≥ 1
- Soit $\delta > 0$ et $\alpha > 1/2$. Nous avons

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \lambda(n) \geq 1+\delta}}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$$

et

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ puissant}}}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty.$$

Comportement asymptotique λ et $1/\lambda$

Théorème

La valeur moyenne asymptotique de la fonction λ et $1/\lambda$ est 1. Lorsque $x \to \infty$, on a

$$\sum_{n \leq x} \lambda(n) = x + c\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \qquad \sum_{n \leq x} 1/\lambda(n) = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

avec $c = \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \approx 0.75536.$

Comportement local de λ

Théorème

Pour tout entier $k \geq 2$ et tout $\varepsilon > 0$, $\exists_\infty n \geq 1$ tels que

$$Q_k(n) \quad := \quad \min(\lambda(n), \lambda(n+1), \ldots, \lambda(n+k-1)) > \frac{k}{k-1} - \varepsilon.$$

Questions?!

- Est-ce qu'il existe une infinité de nombres entiers n tels que n et $n+1$ sont tous deux puissants?

Questions?!

- Est-ce qu'il existe une infinité de nombres entiers n tels que n et $n+1$ sont tous deux puissants?

- Est-ce qu'il existe une infinité de nombres entiers n tels que n, $n+1$ et $n+2$ sont tous trois puissants?

Questions?!

- Est-ce qu'il existe une infinité de nombres entiers n tels que n et $n+1$ sont tous deux puissants?

Rép. : Oui, car l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ possède une infinité de solutions (x, y) entiers.

- Est-ce qu'il existe une infinité de nombres entiers n tels que n, $n+1$ et $n+2$ sont tous trois puissants?

Questions?!

- Est-ce qu'il existe une infinité de nombres entiers n tels que n et $n+1$ sont tous deux puissants?

Rép. : Oui, car l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ possède une infinité de solutions (x, y) entiers.

- Est-ce qu'il existe une infinité de nombres entiers n tels que n, $n+1$ et $n+2$ sont tous trois puissants?

Rép. : Non, si la conjecture ABC est vraie!

La conjecture *ABC*

Conjecture (ABC)

Étant donné $\varepsilon > 0$, $\exists M = M(\varepsilon) > 0$ tel que si a, b, c sont des entiers relativement premiers avec $a + b = c$, alors

$$\begin{array}{rrcl} & c & < & M \cdot (\gamma(abc))^{1+\varepsilon} \\ \textit{c-à-d.} & c & < & M \cdot \left(\prod_{p \mid abc} p \right)^{1+\varepsilon} \end{array}$$

La conjecture ABC

Conjecture (ABC)

Étant donné $\varepsilon > 0$, $\exists M = M(\varepsilon) > 0$ *tel que si* a, b, c *sont des entiers relativement premiers avec* $a + b = c$, *alors*

$$\begin{array}{rrcl} & c & < & M \cdot (\gamma(abc))^{1+\varepsilon} \\ \text{c-à-d.} & c & < & M \cdot \left(\prod_{p \mid abc} p \right)^{1+\varepsilon} \end{array}$$

Théorème

Si la conjecture-ABC *est vraie, alors le nombre de triplets* $(n, n+1, n+2)$ *de nombres puissants est fini.*

Lemme (De Koninck et Doyon)

La fonction λ satisfait à:
(a) $\lambda(mn) \leq \lambda(m) + \lambda(n) \qquad \forall m, n \geq 1$;
(b) $\lambda(mn) \leq \lambda(m)\lambda(n) \qquad$ *si* $(m, n) = 1$.

Lemme (De Koninck et Doyon)

La fonction λ satisfait à:
(a) $\lambda(mn) \leq \lambda(m) + \lambda(n) \qquad \forall m, n \geq 1;$
(b) $\lambda(mn) \leq \lambda(m)\lambda(n) \qquad$ *si* $(m, n) = 1.$

Question: Sous quelles conditions avons-nous $\lambda(m)\lambda(n) \leq \lambda(m) + \lambda(n)$?

Lemme (De Koninck et Doyon)

La fonction λ satisfait à:
(a) $\lambda(mn) \leq \lambda(m) + \lambda(n) \qquad \forall m, n \geq 1;$
(b) $\lambda(mn) \leq \lambda(m)\lambda(n) \qquad si\ (m, n) = 1.$

Question: Sous quelles conditions avons-nous $\lambda(m)\lambda(n) \leq \lambda(m) + \lambda(n)$?

Trivialement, si $\lambda(m)$ ou $\lambda(n) = 1$. Si $m \geq 2$ et $\mu(m) = 0$ est fixe alors, n doit satisfaire

$$\lambda(n) \leq \frac{\lambda(m)}{\lambda(m) - 1}.$$

Calcul de la densité

Soient $A := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \lambda(m)\lambda(n) \leq \lambda(m) + \lambda(n)\}$, $A(x) := \{(m,n) \in A : m,n \leq x\}$ et F la fonction de répartition

$$F(z,x) := \sum_{\substack{n<x \\ \lambda(n)>z}} 1.$$

Calcul de la densité

Soient $A := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \lambda(m)\lambda(n) \leq \lambda(m) + \lambda(n)\}$, $A(x) := \{(m,n) \in A : m,n \leq x\}$ et F la fonction de répartition

$$F(z,x) \;:=\; \sum_{\substack{n<x \\ \lambda(n)>z}} 1.$$

La densité asymptotique de l'ensemble A est égale à 1. C'est-à-dire,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#A(x)}{x^2} = 1.$$

Calcul de la densité ...suite

On évalue

$$\#A(x) = \sum_{m=1}^{x}\sum_{n=1}^{x} 1(m,n)_A = \sum_{\substack{m=1 \\ |\mu(m)|=1}}^{x} [x] + \sum_{\substack{m=2 \\ \mu(m)=0}}^{x} \sum_{\substack{n=1 \\ \lambda(n)\leq \frac{\lambda(m)}{\lambda(m)-1}}}^{x} 1$$

Calcul de la densité ...suite

On évalue

$$\#A(x) = \sum_{m=1}^{x}\sum_{n=1}^{x} 1(m,n)_A = \sum_{\substack{m=1 \\ |\mu(m)|=1}}^{x} [x] + \sum_{\substack{m=2 \\ \mu(m)=0}}^{x} \sum_{\substack{n=1 \\ \lambda(n)\leq \frac{\lambda(m)}{\lambda(m)-1}}}^{x} 1$$

$$= \frac{6}{\pi^2}[x]^2 + \sum_{\substack{m=2 \\ \mu(m)=0}}^{x} \left([x] - F\left(\frac{\lambda(m)}{\lambda(m)-1}, x\right)\right)$$

$$= [x]^2 - \sum_{\substack{m=2 \\ \mu(m)=0}}^{x} F\left(\frac{\lambda(m)}{\lambda(m)-1}, x\right)$$

Calcul de la densité ...suite et fin

La fonction F est donnée par

$$F(z,x) = x^{1/z} e^{(1+o(1))\sqrt{\frac{8(1-1/z)\log x}{\log\log x}}}.$$

Calcul de la densité ...suite et fin

La fonction F est donnée par

$$F(z,x) = x^{1/z} e^{(1+o(1))\sqrt{\frac{8(1-1/z)\log x}{\log\log x}}}.$$

Ce qui implique que

$$F(z,x) = x^{1/z+o(1)}.$$

Calcul de la densité ...suite et fin

La fonction F est donnée par

$$F(z,x) = x^{1/z} e^{(1+o(1))\sqrt{\frac{8(1-1/z)\log x}{\log\log x}}}.$$

Ce qui implique que

$$F(z,x) = x^{1/z+o(1)}.$$

Et ainsi, nous obtenons

$$\#A(x) = [x]^2 - x \sum_{\substack{m=2 \\ \mu(m)=0}}^{x} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/\lambda(m)} \geq [x]^2 - x \sum_{m \leq x} \left(\frac{1}{m}\right)^{1/\lambda(m)}$$

$$\geq x^2 - x \sum_{m \leq x} \frac{1}{\gamma(m)} = x^2 - x \cdot x^{o(1)}.$$