Soyons des designers!

Projet de fin d'études

Jean-Philippe Labbé
Superviseur: Jérémie Rostand

1er mai 2008

Laissez-moi vous conter une histoire...

Frère Jacques

Laissez-moi vous conter une histoire...

Frère Jacques

Ses écolières

Réussite du Frère Jacques

Problème (des écolières de Kirkman)

Quinze écolières marchent en rang de trois quotidiennement pour sept jours. On doit les disposer afin que deux jeunes filles marchent dans un même rang une et une seule fois durant les sept jours.

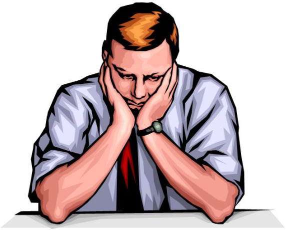
Les étudiantes se nomment Alice, Béatrice, Catherine, Dominique, Élise et ainsi de suite jusqu'à Olivia...

Réussite du Frère Jacques

$$
\overbrace{\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \\ J & K & L \\ M & N & O \end{bmatrix}}^{Dimanche},
\overbrace{\begin{bmatrix} M & H & C \\ A & D & J \\ F & K & N \\ E & I & B \\ G & O & L \end{bmatrix}}^{Lundi},
\overbrace{\begin{bmatrix} G & K & C \\ M & A & E \\ J & I & O \\ D & N & H \\ F & L & B \end{bmatrix}}^{Mardi},
\overbrace{\begin{bmatrix} F & I & C \\ G & M & D \\ E & N & L \\ A & O & K \\ J & B & H \end{bmatrix}}^{Mercredi},
$$

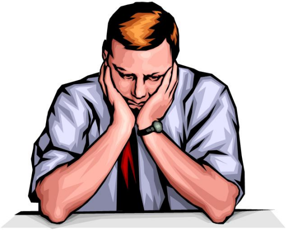
$$
\overbrace{\begin{bmatrix} J & N & C \\ F & G & A \\ D & O & B \\ M & L & I \\ E & H & K \end{bmatrix}}^{Jeudi},
\overbrace{\begin{bmatrix} E & O & C \\ J & F & M \\ A & L & H \\ G & B & N \\ D & K & I \end{bmatrix}}^{Vendredi},
\overbrace{\begin{bmatrix} D & L & C \\ E & J & G \\ M & B & K \\ F & H & O \\ A & I & M \end{bmatrix}}^{Samedi}.
$$

La demande du professeur Fati Guay



Professeur Fati Guay

La demande du professeur Fati Guay



Professeur Fati Guay

Ses élèves

Définition d'un hypergraphe

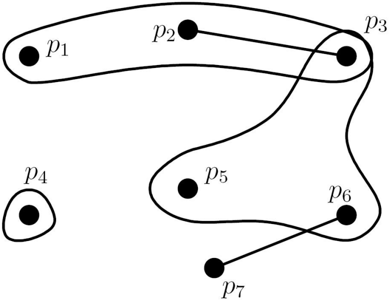
Soient $V := \{p_1, p_2, ..., p_v\}$ et $\mathbf{B} := \{B_i\}_{i \in I}$.

Définition

$\mathcal{H} := (V, \mathbf{B})$ est appelé un hypergraphe d'ordre $v = |V|$ s'il satisfait aux conditions

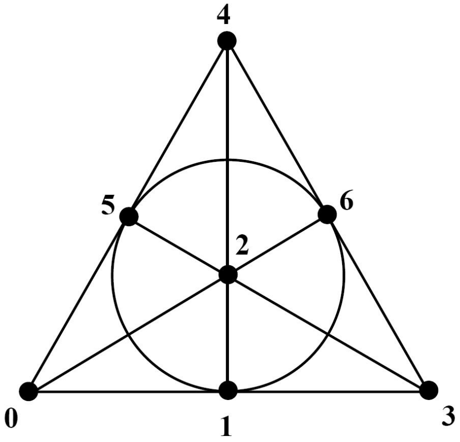
$$\begin{aligned} B_i &\neq \varnothing \qquad (\forall i \in I), \\ \bigcup_{i \in I} B_i &= V. \end{aligned}$$

Représentation d'un hypergraphe



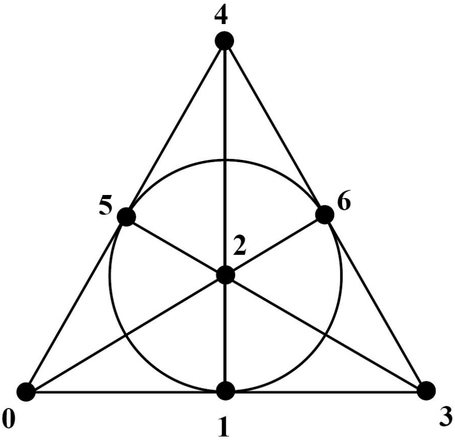
$$H := (\{p_i\}_{1\leq i\leq 7}, \{\{p_1,p_2,p_3\},\{p_3,p_5,p_6\},\{p_2,p_3\},\{p_6,p_7\},\{p_4\}\})$$

Propriétés



PG(2,2)

Propriétés

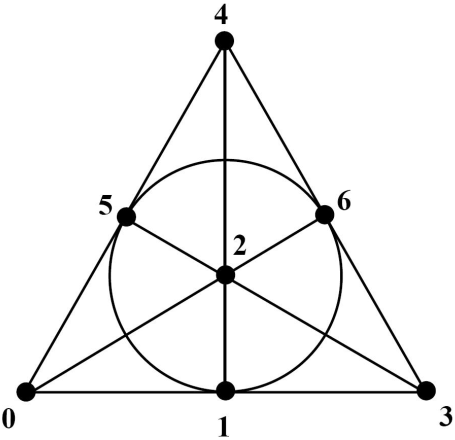


PG(2,2)

Un hypergraphe est :

1. simple ou multiple

Propriétés

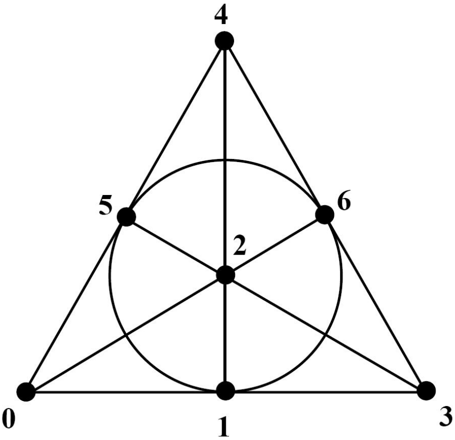


PG(2,2)

Un hypergraphe est :

1. simple ou multiple
2. régulier si $d(p_i) = d(p_j)$ $\forall p_i, p_j \in V$

Propriétés



PG(2,2)

Un hypergraphe est :

1. simple ou multiple
2. régulier si $d(p_i) = d(p_j)$ $\forall p_i, p_j \in V$
3. uniforme si $|B_i| = |B_j|$ $\forall B_i, B_j \in \mathbf{B}$

Matrice d'incidence

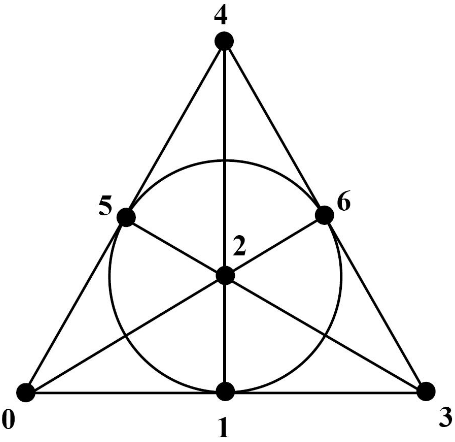
À chaque hypergraphe $\mathcal{H}$, on peut associer une matrice d'incidence $M_{\mathcal{H}}(\mathbb{Z}_2)$.

Définition

$M_{\mathcal{H}}$ est une matrice $v \times b$, où $b := |I|$ avec les coefficients :

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \textit{si } v_i \in B_j \,; \\ 0 & \textit{si } v_i \notin B_j. \end{cases}$$

Matrice d'incidence



PG(2,2)

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Théorème

Pour tout hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathbf{B})$, *nous avons*

$$\sum_{p \in V} d(p) \quad = \quad \sum_{B \in \mathbf{B}} |B|.$$

Théorème

Pour tout hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathbf{B})$, *nous avons*

$$\sum_{p \in V} d(p) \quad = \quad \sum_{B \in \mathbf{B}} |B|.$$

Corollaires

1) Soit $\mathcal{H} = (V, \mathbf{B})$ *un hypergraphe d'ordre* v *ayant* b *arêtes qui est* r*-régulier et* k*-uniforme. Alors*

$$vr \quad = \quad bk.$$

Théorème

Pour tout hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathbf{B})$, nous avons

$$\sum_{p \in V} d(p) = \sum_{B \in \mathbf{B}} |B|.$$

Corollaires

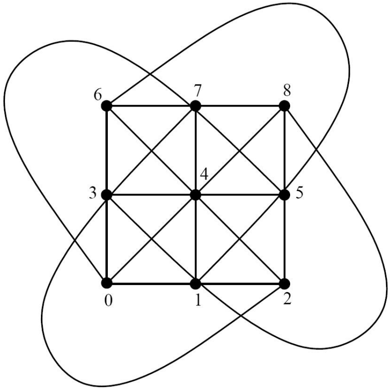
1) Soit $\mathcal{H} = (V, \mathbf{B})$ un hypergraphe d'ordre v ayant b arêtes qui est r-régulier et k-uniforme. Alors

$$vr = bk.$$

2) Soit $\mathcal{G} = (V, \mathbf{B})$ un graphe ayant b arêtes. Alors

$$\sum_{p \in V} d(p) = 2b.$$

Un autre exemple → →



$$AG(2,3) := (\mathbb{Z}_9, \{\{0,1,2\},\{3,4,5\},\{6,7,8\},\{0,3,6\},\{1,4,7\},$$
$$\{2,5,8\},\{2,3,7\},\{1,3,8\},\{1,5,6\},\{0,5,7\},\{0,4,8\},\{2,4,6\}\})$$

Structure d'incidence

Soient V et $\mathbf{B}$ deux ensembles quelconques disjoints et $I \subseteq V \times \mathbf{B}$.

Définition

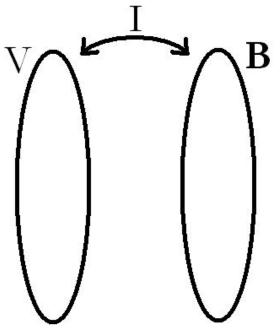
Une structure d'incidence est un triplet $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$.

Structure d'incidence

Soient V et $\mathbf{B}$ deux ensembles quelconques disjoints et $I \subseteq V \times \mathbf{B}$.

Définition

Une *structure d'incidence* *est un triplet* $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$.

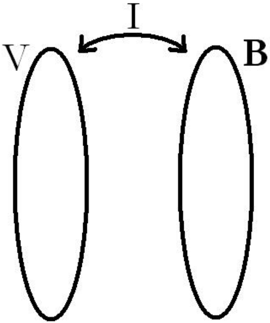


Structure d'incidence

Soient V et $\mathbf{B}$ deux ensembles quelconques disjoints et $I \subseteq V \times \mathbf{B}$.

Définition

Une ***structure d'incidence*** *est un triplet* $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$.



Exemples :

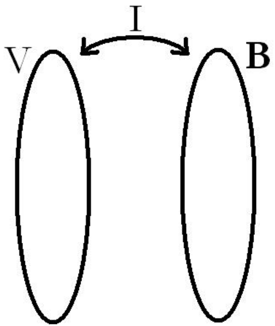
1. $V := \{\text{points dans } \mathbb{R}^2\}$,
   $\mathbf{B} := \{\text{droites dans } \mathbb{R}^2\}$

Structure d'incidence

Soient V et $\mathbf{B}$ deux ensembles quelconques disjoints et $I \subseteq V \times \mathbf{B}$.

Définition

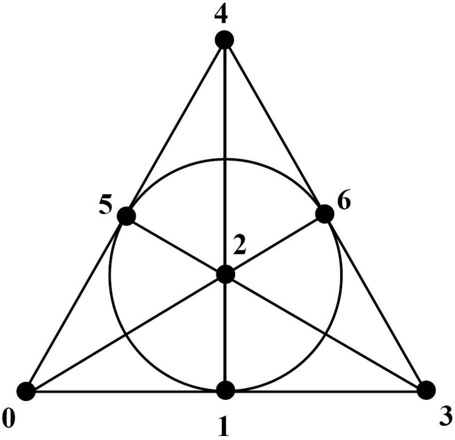
Une structure d'incidence est un triplet $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$.



Exemples :

1. $V := \{\text{points dans } \mathbb{R}^2\}$,
   $\mathbf{B} := \{\text{droites dans } \mathbb{R}^2\}$
2. $V := \{\text{Étudiants du DMS}\}$,
   $\mathbf{B} := \{\text{Cours du DMS}\}$

Définition d'un design →



PG(2,2)

$$
\begin{array}{c}
 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Définition d'un design

Définition

Une structure d'incidence **D** *finie est appelée un design avec paramètres* v, k, λ $(v, k, \lambda \in \mathbb{N})$ *si elle satisfait les conditions suivantes :*

- $|V| = v$;
- *Toute paire de points sont joints par exactement* λ *blocs ;*
- $|B| = k$ *pour tout bloc* B.

Dans ce cas, **D** *est noté* $S_\lambda(2, k; v)$.

Exemples : Voir PG(2,2)=S(2,3 ;7) et Voir AG(2,3)=S(2,3 ;9)

Théorème sur les designs

Théorème

Soient **D** *un* $S(2, k; v)$ *et* $\lambda = 1$. *Alors nous avons*

$$\begin{aligned} d(p) &= (v-1)/(k-1) =: r \qquad \textit{pour tout point } p; \\ |\mathbf{B}| &= v(v-1)/k(k-1) =: b. \end{aligned}$$

Théorème sur les designs →

Théorème

Soient $\mathbf{D}$ *un* $S(2,k;v)$ *et* $\lambda = 1$*. Alors nous avons*

$$\begin{aligned} d(p) &= (v-1)/(k-1) =: r \qquad \textit{pour tout point } p; \\ |\mathbf{B}| &= v(v-1)/k(k-1) =: b. \end{aligned}$$

Corollaire

Soient $v, k, \in \mathbb{N}$*. Alors les conditions suivantes sont nécessaires pour l'existence d'un* $S(2,k;v)$

$$(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1};$$
$$v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}.$$

Partition et résolubilité d'un design

Définition

Soient $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$ *une structure d'incidence et* $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_m$ *une partition de l'ensemble des blocs. Les sous-structures* $\mathbf{D}|_{\mathbf{B_i}}$ *forment une partition de* $\mathbf{D}$.

Partition et résolubilité d'un design

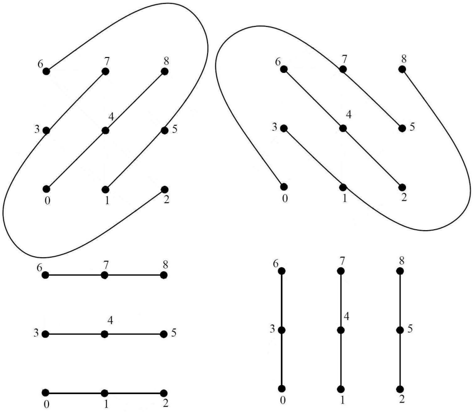
Définition

Soient $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$ *une structure d'incidence et* $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_m$ *une partition de l'ensemble des blocs. Les sous-structures* $\mathbf{D}|_{\mathbf{B_i}}$ *forment une partition de* $\mathbf{D}$.

Définition

Soit $\mathbf{D}$ *une structure d'incidence d'ordre* v. *Si chaque sous-structure d'une partition* $\mathbf{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_m$ *de* $\mathbf{D}$ *est un* $S(1, k; v)$ *(ou classe de parallèles), alors la partition est appelée une résolution.*

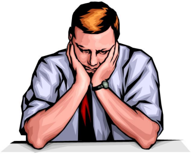
Partition et résolubilité d'un design



Partition de AG(2,3) Voir AG(2,3)

Le frère Jacques explique...

« Finalement, tu recherches un $S(2, k = 4; v = 16)$ résoluble ! »



Critère nécessaire et suffisant

Théorème

Un $S(2,4;v)$ résoluble existe si et seulement si

$$v \equiv 4 \pmod{12}.$$

Critère nécessaire et suffisant

Théorème

Un $S(2,4;v)$ *résoluble existe si et seulement si*

$$v \equiv 4 \pmod{12}.$$

Clairement $v \equiv 0 \pmod{k}$ et cette condition nous donne la nécessité.

Critère nécessaire et suffisant

Théorème

Un $S(2,4;v)$ résoluble existe si et seulement si

$$v \equiv 4 \pmod{12}.$$

Clairement $v \equiv 0 \pmod{k}$ et cette condition nous donne la nécessité.

En 1972, Hanani, Ray-Chaudhuri et Wilson ont démontré la suffisance de ce critère.

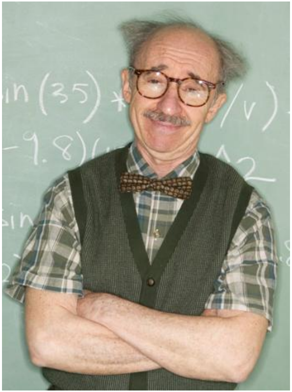
La construction pour $v = 16$

Fati Guay enseigne 5 jours par semaine à 16 élèves : André, Bianca, Claude, Dominique, …, Pascale. Voici les rangs qu'il recherche :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{bmatrix}}^{Lundi}, \overbrace{\begin{bmatrix} E & I & M & D \\ O & A & H & J \\ G & B & L & N \\ K & C & P & F \end{bmatrix}}^{Mardi}, \overbrace{\begin{bmatrix} O & G & K & D \\ P & E & J & B \\ H & I & N & C \\ L & M & F & A \end{bmatrix}}^{Mercredi},$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} P & H & L & D \\ F & O & B & I \\ J & G & C & M \\ N & K & A & E \end{bmatrix}}^{Jeudi}, \overbrace{\begin{bmatrix} F & J & N & D \\ A & P & I & G \\ B & H & M & K \\ C & L & E & O \end{bmatrix}}^{Vendredi}.$$

Épilogue - Merci !



Professeur Fati Guay

Ses élèves disciplinés

Questions

Questions

Problème des écolières de Kirkman →
Construction des designs →
PG →
AG →
Résoluble →
Applications de PG(2,2) →
Carrés latins →
Matrice de Hadamard →

Questions

Problème des écolières de Kirkman : ←

1. Posé en 1847.
2. 7 solutions différentes (isomorphisme près)
3. RS(2,3 ;v) existe $\Leftrightarrow v \equiv 3 \pmod 6$ (1971)

Questions

Construction des designs : ←

1. Graphes existants
2. Algèbre
3. Induction (parfois...)

Lemme

Si $q = 4t + 1$ est une puissance d'un nombre premier, alors il existe un $S(2, 4, 3q + 1)$ résoluble (constructible). $[V = \mathbb{Z}_3 \times GF(q) \cup (*)]$

Questions

Plans projectifs : ←

Définition

Une structure d'incidence $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$ *est appelée un plan projectif si et seulement si elle satisfait les axiomes suivants :*

- *Toute paire de points distincts sont rejoints par exactement une ligne.*
- *Toute paire de lignes distinctes se croisent en un unique point.*
- *Il existe un quadrangle, c'est-à-dire quatre points tels qu'il n'y a pas trois points de ceux-ci qui sont colinéaires.*

Questions

Plans affins : ←

Définition

Une structure d'incidence $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$ *est un* *plan affin* *si et seulement si elle satisfait les axiomes suivants :*

- *Toute paire de points distincts sont rejoints par exactement une ligne.*
- *Étant donné un point* p *et une ligne* G *non incidente à* p*, il y a exactement une ligne* H *tel que* pIH *qui n'est pas adjacente à* G
- *La structure possède un triangle, c'est-à-dire trois points non colinéaires.*

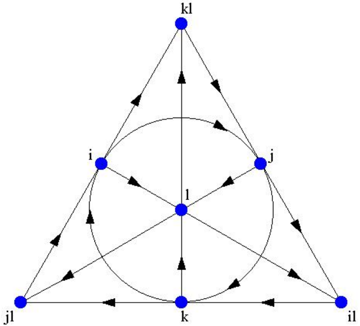
Questions

Quelques designs résolubles : ←

$RS_\lambda(2,k;v)$	#
$RS(2,3;9)$	1
$RS(2,4;16)$	1
$RS(2,5;25)$	1
$RS(2,3;15)$	7
$RS_2(2,3;9)$	9
$RS(2,4;28)$	≥ 7
$RS(2,4;40)$	≥ 2

Questions

Applications de PG(2,2) : ←
Multiplication des octonions



Loterie de Transylvanie
Trois nombres choisis au hasard de 1 à 14.
Solution : Deux plan projectif (1 à 7 et 8 à 14)

1. 21/26 d'avoir 2/3 sur 1 billet
2. 4/26 d'avoir 2/3 sur 3 billets différents
3. 1/26 d'avoir 3/3

Questions

Proposition (←)

Un design transversal $TD[k; s]$ existe $\Leftrightarrow$ il existe $k-2$ carrés latins mutuellement orthogonaux d'ordre s

Exemple :

	BMW	Mercedes	Porsche	Audi
Avant-gauche	Michelin	Goodyear	Conti	Pirelli
Avant-droit	Goodyear	Conti	Pirelli	Michelin
Arrière-gauche	Conti	Pirelli	Michelin	Goodyear
Arrière-droit	Pirelli	Michelin	Goodyear	Conti

Questions

Lien avec les matrices d'Hadamard ←

Proposition

Un design symétrique $S_{n-1}(2, 2n-1; 4n-1)$ *existe* $\Leftrightarrow$ *il existe une matrice d'Hadamard d'ordre* $4n$.