Tableaux Cantoriens: Ordre et relation

Colloque ISM - UQAM

Jean-Philippe Labbé

UQAM
LaCIM

31 mai 2009

Existence des nombres transcendants

Si on écrit le développement en base $s > 1$ des nombres algébriques de l'intervalle $(0, 1)$ dans un tableau T :

Existence des nombres transcendants

Si on écrit le développement en base $s > 1$ des nombres algébriques de l'intervalle $(0, 1)$ dans un tableau T :

s	s^{-1}	s^{-2}	s^{-3}	s^{-4}	s^{-5}	$\cdots$
0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\cdots$
0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\cdots$
0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\cdots$
0	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\cdots$
0	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Existence des nombres transcendants

Si on écrit le développement en base $s > 1$ des nombres algébriques de l'intervalle $(0, 1)$ dans un tableau T :

s	s^{-1}	s^{-2}	s^{-3}	s^{-4}	s^{-5}	$\cdots$
0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\cdots$
0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\cdots$
0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\cdots$
0	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\cdots$
0	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Existence des nombres transcendants

Si on écrit le développement en base $s > 1$ des nombres algébriques de l'intervalle $(0, 1)$ dans un tableau T :

s	s^{-1}	s^{-2}	s^{-3}	s^{-4}	s^{-5}	$\cdots$
0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\cdots$
0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\cdots$
0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\cdots$
0	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\cdots$
0	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

On crée le nombre $b = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots$ où $b_i \neq a_{ii}$

Définitions

Chaque ligne du tableau détermine un *mot* $a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots$

Définition

L'ensemble des mots formés par les lignes est noté L.

Définitions

Chaque ligne du tableau détermine un *mot* $a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots$

Définition

L'ensemble des mots formés par les lignes est noté L.

Le *permanent* d'une matrice $n \times n$ définie sur un anneau est :

$$\sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}.$$

Définitions

Chaque ligne du tableau détermine un *mot* $a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots$

Définition

L'ensemble des mots formés par les lignes est noté L.

Le *permanent* d'une matrice $n \times n$ définie sur un anneau est :

$$\sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}.$$

Naturellement, on définit le permanent d'un tableau T

Définition

Le permanent d'un tableau T est l'ensemble des mots

$$Perm(T) = \bigcup_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}$$

Définitions

Chaque ligne du tableau détermine un *mot* $a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots$

Définition

L'ensemble des mots formés par les lignes est noté L.

Définition

Le permanent d'un tableau T est l'ensemble des mots

$$Perm(T) = \bigcup_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}$$

Définition

Un tableau T est Cantorien si aucun mot formé par les lignes n'apparaît dans $Perm(T)$. Donc,

$$L \cap Perm(T) = \varnothing.$$

Nombres transcendants

Fait

La diagonale $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots$ *est un nombre transcendant.*

Nombres transcendants

Fait

La diagonale $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots$ *est un nombre transcendant.*

Fait

La diagonale $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4}\cdots$ *est un nombre transcendant, où* $\sigma \in S_\infty$.

Nombres transcendants

Fait

La diagonale $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots$ est un nombre transcendant.

Fait

La diagonale $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4}\cdots$ est un nombre transcendant, où $\sigma \in S_\infty$.

Fait

Soit L un ensemble dénombrable de $[0,1]$ et T le tableau formé par les développements des éléments de L en base $s \geq 2$. Alors T est Cantorien. C'est-à-dire :

$$Perm(T) \subseteq [0,1] \setminus L.$$

Nombres transcendants

Fait

Soit L un ensemble dénombrable de $[0,1]$ et T le tableau formé par les développements des éléments de L en base $s \geq 2$. Alors T est Cantorien. C'est-à-dire :

$$Perm(T) \subseteq [0,1] \setminus L.$$

Fait

Si $s = 2$, alors nous avons

$$Perm(T) = [0,1] \setminus L.$$

Donc, si L contient tous les nombres algébriques de $[0,1]$, alors $Perm(T)$ est exactement l'ensemble de tous les nombres transcendants de $[0,1]$.

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.
Voici quelques exemples de tableaux :

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.
Voici quelques exemples de tableaux :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$$

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.
Voici quelques exemples de tableaux :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \color{red}{b} & a \\ \color{red}{b} & a & b \\ b & b & \color{red}{b} \end{pmatrix}$$

Le troisième n'est pas Cantorien.

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.
Voici quelques exemples de tableaux :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \color{red}{b} & a \\ \color{red}{b} & a & b \\ b & b & \color{red}{b} \end{pmatrix}$$

Le troisième n'est pas Cantorien.

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

$$\begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}$$

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

$$\begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

$$\begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

$$\begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}$$

Relation d'équivalence sur les tableaux

Fait

La propriété « être Cantorien » est invariant :

- *par permutation de lignes ;*
- *par permutation de colonnes ;*
- *étant donnée une bijection de l'alphabet, remplacer les éléments d'une colonne par leurs images via la bijection.*

Relation d'équivalence sur les tableaux

Fait

La propriété « être Cantorien » est invariant :

- *par permutation de lignes ;*
- *par permutation de colonnes ;*
- *étant donnée une bijection de l'alphabet, remplacer les éléments d'une colonne par leurs images via la bijection.*

$$\begin{pmatrix} a & a & b & b & c \\ a & a & b & b & c \\ a & a & b & b & c \\ b & b & a & a & d \\ b & b & a & a & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b \\ b & b & b & b & b \end{pmatrix}$$

Définition

Définition

Soit T' et T deux tableaux $n \times n$. Alors on note

$$T' \sim T \iff T' \text{ peut être obtenu à partir de } T \text{ par une suite finie de transformation invariantes}$$

On dira alors que T' est équivalent à T.

Ordre total sur les tableaux

Un tableau est une suite de n mots de longueur n de l'alphabet A.

Ordre total sur les tableaux

Un tableau est une suite de n mots de longueur n de l'alphabet A.

Définition

Soient T et T' deux tableaux d'ordre n. On définit naturellement la relation

$$T' \preceq T \iff \begin{array}{l} T'[1] \preceq_{lex} T[1] \\ si\ T'[1] =_{lex} T[1], alors\ T'[2] \preceq_{lex} T[2] \\ etc. \end{array}$$

où $\preceq_{lex}$ est l'ordre lexicographique sur A.

Représentant minimal d'une classe

Fait

Soit T un tableau d'ordre n. Étant donné que les tableaux sont totalement ordonnés, il existe un représentant minimal T_{min} de T sous $\equiv$ et $\prec$.

Représentant minimal d'une classe

Fait

Soit T un tableau d'ordre n. Étant donné que les tableaux sont totalement ordonnés, il existe un représentant minimal T_{min} de T sous $\equiv$ et $\prec$.

Problème

Comment trouver « rapidement » T_{min} ? Comment trouver « rapidement » tous les T_{min} ?
(Objet principal de la recherche)

Représentant minimal d'une classe

Fait

Soit T un tableau d'ordre n. Étant donné que les tableaux sont totalement ordonnés, il existe un représentant minimal T_{min} de T sous $\equiv$ et $\prec$.

Problème

Comment trouver « rapidement » T_{min} ? Comment trouver « rapidement » tous les T_{min} ?
(Objet principal de la recherche)

L'objectif est de trouver une condition nécessaire *et* suffisante pour qu'un tableau soit Cantorien.

Représentant minimaux Cantoriens

Nombre de tableaux Cantorien d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

Représentant minimaux Cantoriens

Nombre de tableaux Cantorien d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	$1 \cdot 2^2$	$4 \cdot 3^2$	$9 \cdot 4^2$	$16 \cdot 5^2$	$25 \cdot 6^2$
3	$3 \cdot 2^3$	$188 \cdot 3^3$	$1863 \cdot 4^3$	$9264 \cdot 5^3$	$32075 \cdot 6^3$
4	$109 \cdot 2^4$	$100144 \cdot 3^4$	*	-	-
5	$2765 \cdot 2^5$	*	*	*	-
$\vdots$	$\vdots$				

Représentant

Nombre de représentants minimaux Cantoriens d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1
3	1	5	5	5	5
4	6	*	*	-	-
5	*	*	*	*	-
⋮	⋮				

Représentant

Nombre de représentants minimaux Cantoriens d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1
3	1	5	5	5	5
4	6	*	*	-	-
5	*	*	*	*	-
⋮	⋮				

Suite : à l'aide des représentants, trouver une condition nécessaire et suffisante. Fera appel aux tableaux de Young ?

Représentant

Nombre de représentants minimaux Cantoriens d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1
3	1	5	5	5	5
4	6	*	*	-	-
5	*	*	*	*	-
$\vdots$	$\vdots$				

Suite : à l'aide des représentants, trouver une condition nécessaire et suffisante. Fera appel aux tableaux de Young ?

Représentant

Nombre de représentants minimaux Cantoriens d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1
3	1	5	5	5	5
4	6	*	*	-	-
5	*	*	*	*	-
$\vdots$	$\vdots$				

Suite : à l'aide des représentants, trouver une condition nécessaire et suffisante. Fera appel aux tableaux de Young ?