Tableaux Cantoriens et bi-Cantoriens

CIRM

Jean-Philippe Labbé

UQAM
LaCIM

12 mai 2010

Existence des nombres transcendants

Si on écrit le développement en base $s > 1$ des nombres algébriques de l'intervalle $(0, 1)$ dans un tableau T :

Existence des nombres transcendants

Si on écrit le développement en base $s > 1$ des nombres algébriques de l'intervalle $(0, 1)$ dans un tableau T :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
s & s^{-1} & s^{-2} & s^{-3} & s^{-4} & s^{-5} & \cdots \\
\hline
0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\
0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\
0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\
0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots \\
0 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Existence des nombres transcendants

Si on écrit le développement en base $s > 1$ des nombres algébriques de l'intervalle $(0, 1)$ dans un tableau T :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
s & s^{-1} & s^{-2} & s^{-3} & s^{-4} & s^{-5} & \cdots \\
\hline
0 & \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\
0 & a_{21} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\
0 & a_{31} & a_{32} & \color{red}{a_{33}} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\
0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \color{red}{a_{44}} & a_{45} & \cdots \\
0 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \color{red}{a_{55}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Existence des nombres transcendants

Si on écrit le développement en base $s > 1$ des nombres algébriques de l'intervalle $(0, 1)$ dans un tableau T :

$$\begin{array}{c|cccccc}
s & s^{-1} & s^{-2} & s^{-3} & s^{-4} & s^{-5} & \cdots \\
\hline
0 & \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\
0 & a_{21} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\
0 & a_{31} & a_{32} & \color{red}{a_{33}} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\
0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \color{red}{a_{44}} & a_{45} & \cdots \\
0 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \color{red}{a_{55}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

On crée le nombre $b = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \cdots$ où $b_i \neq a_{ii}$

Définitions

Chaque ligne du tableau détermine un *mot* $a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots$

Définition

L'ensemble des mots formés par les lignes est noté L.

Définitions

Chaque ligne du tableau détermine un *mot* $a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots$

Définition

L'ensemble des mots formés par les lignes est noté L.

Le *permanent* d'une matrice $n \times n$ définie sur un anneau est :

$$\sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}.$$

Définitions

Chaque ligne du tableau détermine un *mot* $a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots$

Définition

L'ensemble des mots formés par les lignes est noté L.

Le *permanent* d'une matrice $n \times n$ définie sur un anneau est :

$$\sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}.$$

Naturellement, on définit le permanent d'un tableau T

Définition

Le permanent d'un tableau T est l'ensemble des mots

$$Perm(T) = \bigcup_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$$

Définitions

Chaque ligne du tableau détermine un *mot* $a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4}\cdots$

Définition

L'ensemble des mots formés par les lignes est noté L.

Définition

Le permanent d'un tableau T est l'ensemble des mots

$$Perm(T) = \bigcup_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\cdots a_{\pi(n)n}$$

Définition

Un tableau T est Cantorien si aucun mot formé par les lignes n'apparaît dans $Perm(T)$. Donc,

$$L \cap Perm(T) = \varnothing.$$

Nombres transcendants

Fait

La diagonale $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots$ *est un nombre transcendant.*

Nombres transcendants

Fait

La diagonale $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots$ *est un nombre transcendant.*

Fait

La diagonale $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4}\cdots$ *est un nombre transcendant, où* $\sigma \in S_\infty$.

Nombres transcendants

Fait

La diagonale $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots$ *est un nombre transcendant.*

Fait

La diagonale $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4}\cdots$ *est un nombre transcendant, où* $\sigma \in S_\infty$.

Fait

Soit L *un ensemble dénombrable de* $[0,1]$ *et* T *le tableau formé par les développements des éléments de* L *en base* $s \geq 2$. *Alors* T *est Cantorien. C'est-à-dire :*

$$Perm(T) \subseteq [0,1] \setminus L.$$

Nombres transcendants

Fait

Soit L un ensemble dénombrable de $[0,1]$ et T le tableau formé par les développements des éléments de L en base $s \geq 2$. Alors T est Cantorien. C'est-à-dire :

$$Perm(T) \subseteq [0,1] \setminus L.$$

Fait

Si $s = 2$, alors nous avons

$$Perm(T) = [0,1] \setminus L.$$

Donc, si L contient tous les nombres algébriques de $[0,1]$, alors $Perm(T)$ est exactement l'ensemble de tous les nombres transcendants de $[0,1]$.

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.
Voici quelques exemples de tableaux :

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.
Voici quelques exemples de tableaux :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$$

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.
Voici quelques exemples de tableaux :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \color{red}{b} & a \\ \color{red}{b} & a & b \\ b & b & \color{red}{b} \end{pmatrix}$$

Le troisième n'est pas Cantorien.

Exemples

Pour la suite, nous considérons les tableaux finis $n \times n$. Soit A un alphabet de s lettres.

Voici quelques exemples de tableaux :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \color{red}{b} & a \\ \color{red}{b} & a & b \\ b & b & \color{red}{b} \end{pmatrix}$$

Le troisième n'est pas Cantorien.

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i*, il existe une ligne* i' *telle que* $a_{ij} \neq a_{i'j}$*, pour tout* j*, alors le tableau est Cantorien.*

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

$$\begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}$$

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

$$\begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

$$\begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Condition suffisante (réduite)

Fait

Si pour chaque ligne i, il existe une ligne i' telle que $a_{ij} \neq a_{i'j}$, pour tout j, alors le tableau est Cantorien.

$$\begin{pmatrix} a & a & b & a & a & b \\ b & b & a & b & b & a \\ a & b & a & b & a & b \\ b & a & b & a & b & a \\ b & b & b & a & b & b \\ a & a & a & b & a & a \end{pmatrix}$$

Relation d'équivalence sur les tableaux

Fait

La propriété « être Cantorien » est invariant :

- *par permutation de lignes ;*
- *par permutation de colonnes ;*
- *étant donnée une bijection de l'alphabet, remplacer les éléments d'une colonne par leurs images via la bijection.*

Relation d'équivalence sur les tableaux

Fait

La propriété « être Cantorien » est invariant :

- *par permutation de lignes ;*
- *par permutation de colonnes ;*
- *étant donnée une bijection de l'alphabet, remplacer les éléments d'une colonne par leurs images via la bijection.*

$$\begin{pmatrix} a & a & b & b & c \\ a & a & b & b & c \\ a & a & b & b & c \\ b & b & a & a & d \\ b & b & a & a & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b \\ b & b & b & b & b \end{pmatrix}$$

Définition

Définition

Soit T' et T deux tableaux $n \times n$. Alors on note

$$T' \sim T \iff T' \text{ peut être obtenu à partir de } T \text{ par une suite finie de transformation invariantes}$$

On dira alors que T' est équivalent à T.

Ordre total sur les tableaux

Un tableau est une suite de n mots de longueur n de l'alphabet A.

Ordre total sur les tableaux

Un tableau est une suite de n mots de longueur n de l'alphabet A.

Définition

Soient T et T' deux tableaux d'ordre n. On définit naturellement la relation

$$
\begin{aligned}
T' \preceq T \iff & T'[1] \preceq_{lex} T[1] \\
& si\ T'[1] =_{lex} T[1], alors\ T'[2] \preceq_{lex} T[2] \\
& etc.
\end{aligned}
$$

où $\preceq_{lex}$ est l'ordre lexicographique sur A.

Représentant minimal d'une classe

Fait

Soit T un tableau d'ordre n. Étant donné que les tableaux sont totalement ordonnés, il existe un représentant minimal T_{min} de T sous $\equiv$ et $\prec$.

Représentant minimal d'une classe

Fait

Soit T un tableau d'ordre n. Étant donné que les tableaux sont totalement ordonnés, il existe un représentant minimal T_{min} de T sous $\equiv$ et $\prec$.

Problème

Comment trouver « rapidement » T_{min} ? Comment trouver « rapidement » tous les T_{min} ?
(Objet principal de la recherche)

Représentant minimal d'une classe

Fait

Soit T un tableau d'ordre n. Étant donné que les tableaux sont totalement ordonnés, il existe un représentant minimal T_{min} de T sous $\equiv$ et $\prec$.

Problème

Comment trouver « rapidement » T_{min} ? Comment trouver « rapidement » tous les T_{min} ?
(Objet principal de la recherche)

L'objectif est de trouver une condition nécessaire *et* suffisante pour qu'un tableau soit Cantorien.

Représentant minimaux Cantoriens

Nombre de tableaux Cantorien d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

Représentant minimaux Cantoriens

Nombre de tableaux Cantorien d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	$1 \cdot 2^2$	$4 \cdot 3^2$	$9 \cdot 4^2$	$16 \cdot 5^2$	$25 \cdot 6^2$
3	$3 \cdot 2^3$	$188 \cdot 3^3$	$1863 \cdot 4^3$	$9264 \cdot 5^3$	$32075 \cdot 6^3$
4	$109 \cdot 2^4$	$100144 \cdot 3^4$	*	-	-
5	$2765 \cdot 2^5$	*	*	*	-
$\vdots$	$\vdots$				

Représentant

Nombre de représentants minimaux Cantoriens d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1
3	1	5	5	5	5
4	6	*	*	-	-
5	*	*	*	*	-
$\vdots$	$\vdots$				

Représentant

Nombre de représentants minimaux Cantoriens d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1
3	1	5	5	5	5
4	6	*	*	-	-
5	*	*	*	*	-
$\vdots$	$\vdots$				

Suite : à l'aide des représentants, trouver une condition nécessaire et suffisante. Fera appel aux tableaux de Young ?

Représentant

Nombre de représentants minimaux Cantoriens d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n \backslash s$	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1
3	1	5	5	5	5
4	6	*	*	-	-
5	*	*	*	*	-
$\vdots$	$\vdots$				

Suite : à l'aide des représentants, trouver une condition nécessaire et suffisante. Fera appel aux tableaux de Young ?

Représentant

Nombre de représentants minimaux Cantoriens d'ordre n sur un alphabet à s lettres :

$n\backslash s$	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1
3	1	5	5	5	5
4	6	*	*	-	-
5	*	*	*	*	-
$\vdots$	$\vdots$				

Suite : à l'aide des représentants, trouver une condition nécessaire et suffisante. Fera appel aux tableaux de Young ?